

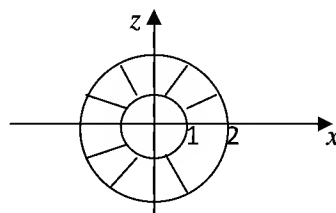
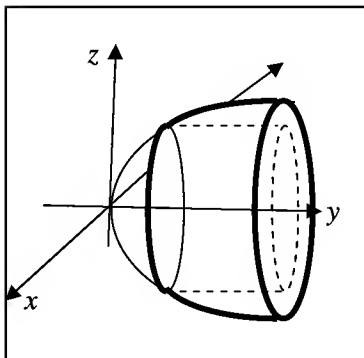
## Coloquio resuelto de 13/12/12

1a) Sea  $\vec{F}(x, y, z) = \left( -\frac{x}{b}, \frac{b^3}{3}(x^2 + z^2), (a-3)^2 z \right)$  un campo escalar sobre  $\mathbb{R}^3$  con

$a, b \in \mathbb{R} ; b \neq 0$ . Sea la superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 ; 1 \leq y \leq 4\}$  orientada con la normal alejándose del eje  $y$ .

Se denomina  $h(a, b)$  al flujo del campo  $\vec{F}$  a través de la superficie  $\Sigma$ . Hallar los puntos estacionarios de  $h$  y clasificarlos.

Solución:



Esta es la proyección de la superficie sobre  $xz$

El vector normal a la superficie  $\Sigma$  es

$$y = x^2 + z^2 \rightarrow x^2 + z^2 - y = 0 \rightarrow \vec{n} = (2x, -1, 2z)$$

Determinamos el flujo por definición, para ello pasamos la

Integral de Superficie en cartesianas a Coord. Cilíndricas.

$$h(a, b) = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int \int_{\Sigma} \left( -\frac{x}{b}, \frac{b^3}{3}(x^2 + z^2), (a-3)^2 z \right) \cdot (2x, -1, 2z) \, dx \, dz$$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \left( -\frac{2r^2 \cos^2(\varphi)}{b} - \frac{b^3}{3}(r^2) + 2(a-3)^2 r^2 \sin^2(\varphi) \right) r \, dr \, d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( -\frac{r^4}{2b} \cos^2(\varphi) - \frac{b^3 r^4}{12} + \frac{r^4 (a-3)^2 \sin^2(\varphi)}{2} \right) \Big|_1^2 \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{15}{2b} \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} - \frac{15b^3}{12} + \frac{15}{2} (a-3)^2 \underbrace{\sin^2(\varphi)}_{\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}} \right) d\varphi = -\frac{15}{2b}\pi - \frac{15b^3\pi}{6} + 15(a-3)^2\pi$$

$$\Rightarrow h(a, b) = -\frac{15}{2b}\pi - \frac{15b^3\pi}{6} + 15(a-3)^2\pi$$

Consideramos esta función y determinamos puntos estacionarios:

$$h(a, b) = -\frac{15}{2b}\pi - \frac{15b^3\pi}{6} + 15(a-3)^2\pi$$

$$\frac{\partial h}{\partial a} = 15\pi \cdot 2(a-3) = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = \frac{15\pi}{2b^2} - \frac{15b^2\pi}{2} = \frac{15\pi}{2} \left( \frac{1}{b^2} - b^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-b^4}{b^2} = 0 \Leftrightarrow b = 1 \text{ o } b = -1$$

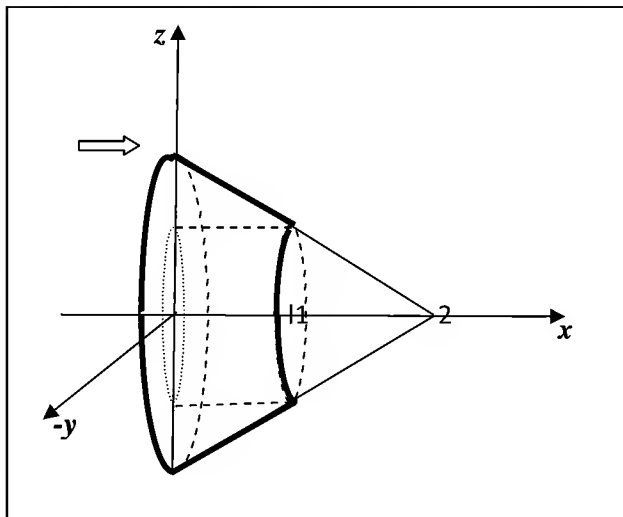
Los puntos estacionarios son:  $P = (3, 1)$  ;  $Q = (3, -1)$

$$H(a, b) = \begin{vmatrix} 15\pi & 0 \\ 0 & \frac{15\pi}{2}(-2b^{-3} - 2b) \end{vmatrix}.$$

siendo:  $H(3, 1) > 0 \wedge \frac{\partial^2 h}{\partial a^2} > 0 \rightarrow \text{Mínimo Local en } (3, 1, h(3, 1))$

$H(3, -1) < 0$  No hay extremo,  $(3, -1, h(3, -1))$  es punto de ensilladura

2. Sea  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq 2 - x; 0 \leq x \leq 1\}$  un sólido con densidad volumétrica constante. Hallar su centro de masa si se sabe que el Volumen de  $W$  es  $\frac{7}{3}\pi$



Por ser la figura simétrica respecto al eje  $x$  el Centro de Masa está en el eje  $x$ , por lo tanto:

$$y_{cm} = 0 \quad ; \quad z_{cm} = 0 \quad \text{Sólo hay que}$$

$$\text{determinar } x_{cm} = \frac{\iiint_W k x \, dx \, dy \, dz}{\underbrace{\iiint_W k \, dx \, dy \, dz}_k \text{ Vol}(W)}$$

Sabiendo que el Volumen de  $W$  es  $\frac{7}{3}\pi$

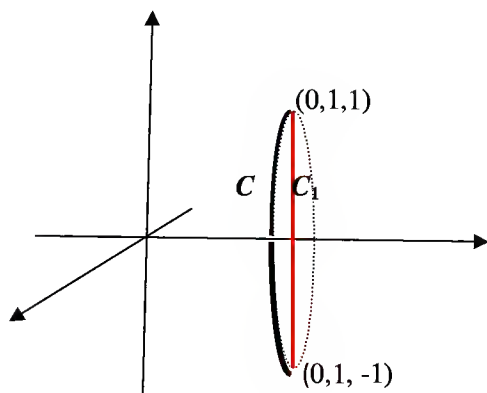
$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{2-r} k r x dx dr d\varphi}{k \frac{7}{3} \pi} + \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 k x r dx dr d\varphi}{k \frac{7}{3} \pi} = \frac{\frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r(2-r)^2 dr d\varphi}{k \frac{7}{3} \pi} + \frac{\frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi}{k \frac{7}{3} \pi} = \\
&= \frac{\frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (4r - 4r^2 + r^3) dr d\varphi}{k \frac{7}{3} \pi} + \frac{\frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi}{k \frac{7}{3} \pi} = \\
&= \frac{\frac{k}{2} \int_0^{2\pi} (2r^2 - 4r^3/3 + r^4/4) \Big|_1^2 d\varphi}{k \frac{7}{3} \pi} + \frac{\frac{k}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi}{k \frac{7}{3} \pi} = \frac{\frac{k}{2} (6 - 28/3 + 15/4) 2\pi}{k \frac{7}{3} \pi} + \frac{\frac{k}{2} \pi}{k \frac{7}{3} \pi} = \\
&= \frac{(-\frac{10}{3} + \frac{15}{4})}{\frac{7}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{3}} + \frac{\frac{3}{14}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{7}{3}} + \frac{\frac{3}{14}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{7}{3}} + \frac{\frac{6}{28}}{\frac{7}{3}} = \underline{\underline{\frac{11}{28}}}
\end{aligned}$$

Las coordenadas del Centro de Masa son:  $\underline{C_m = (11/28, 0, 0)}$

3- Sean  $g$  un campo escalar de clase  $C^2$  y  $\overline{F}(x, y, z) = \left( \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), z^2 \right)$ . Calcular la

Circulación de  $\overline{F}$  sobre la curva  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 ; y = x^2 + z^2 ; x \geq 0\}$

con orientación  $(0, 1, -1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1)$ .



Siendo la curva dada abierta, para aplicar el teorema de Stokes se cierra la curva con el segmento  $C_1$ , el  $\text{Rot}(\overline{F}) = \overline{0}$  y la curva  $C_1$  está definida como la imagen de la función vectorial:

$$\overline{g}(t) = (0, 1, t) \quad , \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\overline{g}'(t) = (0, 0, 1)$$

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{g} + \int_{C_1} \overline{F} \cdot d\overline{g} = \overline{0}$$

$$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{g} = \int_{-1}^1 (\dots, t^2) \cdot (0, 0, 1) dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

4- Resolver el siguiente problema de valores iniciales:  $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$  con  $y(-2) = 4$

**SOLUCIÓN:** Es una Ec. Dif. de Bernoulli, hacemos:  $z = y^{1-(2)} = y^{-1} \rightarrow z = y^{-1} \rightarrow$   
 $\rightarrow y = z^{-1} \rightarrow y' = -z^{-2} z'$

Reemplazando:  $-z^{-2} z' + \frac{1}{x+1} z^{-1} = -z^{-2}$   $\xrightarrow{\text{div. por } (-z^{-2})}$   $z' - \frac{1}{x+1} z = 1$  (Ec. Dif. lineal)

$z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$  reemplazando:  $u'v + uv' - \frac{1}{x+1} uv = 1$

(\*)  $v \left( u' - \frac{1}{x+1} u \right) + uv' = 1$  haciendo:  $u' - \frac{1}{x+1} u = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x+1} u \rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x+1}$

$\ln(u) = \ln(x+1) + C$  (si  $C = 0$ )  $\rightarrow u = x+1$

reemplazando en (\*):  $(x+1)v' = 1 \Rightarrow dv = \frac{1}{x+1} dx \rightarrow v = \ln|x+1| + C$

$\Rightarrow z = (x+1) [\ln|x+1| + C]$   $\Rightarrow$  **SOLUCIÓN GENERAL:**  $y = z^{-1} = \frac{1}{(x+1) [\ln|x+1| + C]}$

con  $y(-2) = 4$  encontramos  $C$ :  $4 = \frac{1}{(-1) \left[ \underbrace{\ln(1)}_0 + C \right]} \Rightarrow 4 = \frac{1}{-C} \rightarrow C = -\frac{1}{4}$

**SOLUCIÓN PARTICULAR:**  $y = \frac{1}{(x+1) [\ln|x+1| - 1/4]}$

Nota: El Ejercicio también puede resolverse haciendo:  $y = u \cdot v$

5- Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un sólido cuyo borde,  $\partial\Omega$ , es una superficie cerrada y suave orientada con el campo de vectores normales salientes y  $g$  un campo escalar definido sobre  $\mathbb{R}^3$ .

Dar las hipótesis necesarias para probar que

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \tilde{n}} dS = \iiint_{\Omega} \nabla^2 g dV \quad (\tilde{n} \text{ saliente})$$

Usando Teorema de Gauss o de la Divergencia.

Solución: "1<sup>ero</sup> dar condiciones para aplicar T. de Gauss", si  $g$  es diferenciable, la derivada

direccional:  $\frac{\partial g}{\partial \tilde{n}} = \nabla g \cdot \tilde{n}$ , aplicando el teorema al campo vectorial  $\nabla g$  resulta:

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \tilde{n}} dS = \iint_{\partial\Omega} \nabla g \cdot \tilde{n} ds = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \nabla g dV = \iiint_{\Omega} \nabla^2 g dV$$